

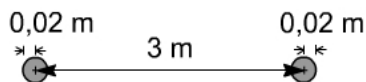
Parámetros de Línea

1) Una línea monofásica tiene conductores de 2 cm de diámetro, separados 3 m.

Calcular la inductancia interna si los conductores son macizos y sus materiales son:

a) Cobre

b) Acero



Como se demostró en la teoría, la inductancia interna de cada conductor solo

depende de la permeabilidad magnética del material. $L_0 = \frac{\mu}{8 \cdot \pi}$

a) si el material es cobre: $\mu_r = 1 \Rightarrow \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

$$L_{0\text{cu}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8 \cdot \pi} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

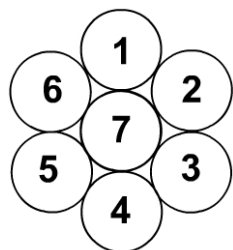
b) Si el material es acero: $\mu_r = 50 \Rightarrow \mu = \mu_r \cdot \mu_0 = 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} = 2\pi \cdot 10^{-5} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

$$L_{0\text{ac}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-5}}{8 \cdot \pi} = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

2) Determinar el RMG del conductor de la figura. Comparar con el valor obtenido suponiéndolo macizo con un diámetro igual a 3 veces el de cada subconductor.

Diámetro de cada subconductor $D = 4 \text{ mm}$.

Comparando las distancias entre centros de subconductores obtenemos:

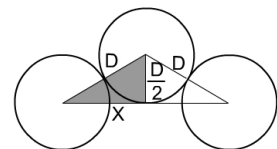


$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{44} = D_{55} = D_{66} = D_{77} = \frac{D}{2} \cdot e^{-1/4}$$

$$D_{12} = D_{16} = D_{17} = D_{21} = D_{23} = D_{27} = D_{32} = D_{34} = D_{37} =$$

$$D_{43} = D_{45} = D_{47} = D_{54} = D_{56} = D_{57} = D_{65} = D_{61} = D_{67} =$$

$$D_{71} = D_{72} = D_{73} = D_{74} = D_{75} = D_{76} = D$$



En el triángulo
sombreado:

$$X = \sqrt{D^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{D^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{D}{2} \sqrt{3}$$

$$D_{13} = D_{15} = D_{24} = D_{26} = D_{31} = D_{35} = D_{42} = D_{46} = D_{51} = D_{53} = D_{62} = D_{64} =$$

$$2 \cdot X = D\sqrt{3}$$

$$D_{14} = D_{25} = D_{36} = D_{41} = D_{52} = D_{63} = 2D$$

Si llamamos D_1 a todas las distancias que comienzan en el subconductor 1; D_2 a las que comienzan en el subconductor 2; etc.:

$$D1 = D11 \cdot D12 \cdot D13 \cdot D14 \cdot D15 \cdot D16 \cdot D17 = \frac{D}{2} e^{-1/4} \cdot D \cdot D\sqrt{3} \cdot 2D \cdot D\sqrt{3} \cdot D \cdot D = 3 \cdot e^{-1/4} \cdot D^7$$

Debido a la simetría del conductor: $D1 = D2 = D3 = D4 = D5 = D6$

$$D7 = D71 \cdot D72 \cdot D73 \cdot D74 \cdot D75 \cdot D76 \cdot D77 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot \frac{D}{2} e^{-1/4} = \frac{e^{-1/4}}{2} \cdot D^7$$

El Radio medio geométrico (RMG) será: $RMG = \sqrt[49]{D1 \cdot D2 \cdot D3 \cdot D4 \cdot D5 \cdot D6 \cdot D7}$

$$RMG = \sqrt[49]{\left(3 \cdot e^{-1/4} \cdot D^7\right)^6 \cdot \frac{e^{-1/4}}{2} \cdot D^7} = \sqrt[49]{\frac{3^6}{2} \cdot \left(e^{-1/4}\right)^7} \cdot D = 1,088 \cdot D$$

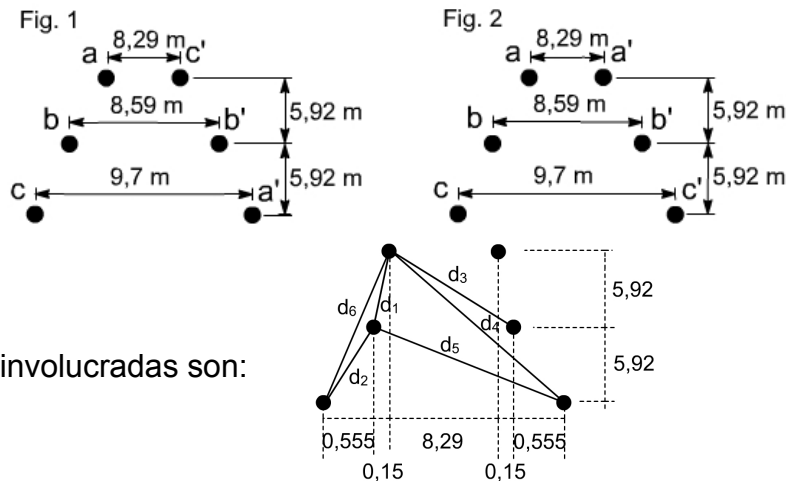
$$RMG = 4,353 \text{ mm}$$

Si consideramos al conductor como macizo, el radio es $\frac{3 \cdot D}{2}$, o sea:

$$RMG = \frac{3 \cdot D}{2} \cdot e^{-1/4} = 4,673 \text{ mm}$$

3) La línea de la figura tiene una longitud de 100 km. El radio de los subconductores es de 12,5 mm. Calcular las reactancias inductivas y capacitivas totales.

- a) considerando la disposición de la figura 1
- b) considerando la disposición de la figura 2



Las distancias involucradas son:

$$d_1 = \sqrt{(0,15)^2 + (5,92)^2} = 5,92 \text{ m}$$

$$d_2 = \sqrt{(0,555)^2 + (5,92)^2} = 5,95 \text{ m}$$

$$d_3 = \sqrt{(8,29 + 0,15)^2 + (5,92)^2} = 10,31 \text{ m}$$

$$d_4 = \sqrt{(8,29 + 0,15 + 0,555)^2 + (5,92 + 5,92)^2} = 14,87 \text{ m}$$

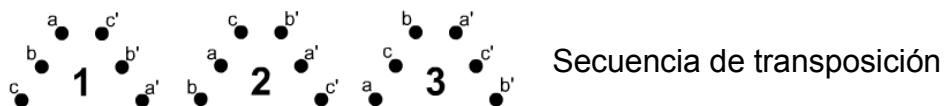
$$d_5 = \sqrt{(0,15 + 8,29 + 0,15 + 0,555)^2 + (5,92)^2} = 10,89 \text{ m}$$

$$d_6 = \sqrt{(0,555 + 0,15)^2 + (5,92 + 5,92)^2} = 11,86 \text{ m}$$

$$a) \text{ Deq} = \sqrt[12]{\underbrace{D_{ab}}_{d_1} \cdot \underbrace{D_{ac}}_{d_6} \cdot \underbrace{D_{ab'}}_{d_3} \cdot \underbrace{D_{ac'}}_{8,29} \cdot \underbrace{D_{ba}}_{d_1} \cdot \underbrace{D_{bc}}_{d_2} \cdot \underbrace{D_{ba'}}_{d_5} \cdot \underbrace{D_{bc'}}_{d_3} \cdot \underbrace{D_{ca}}_{d_6} \cdot \underbrace{D_{cb}}_{d_2} \cdot \underbrace{D_{ca'}}_{9,7} \cdot \underbrace{D_{cb'}}_{d_5}}$$

$$\text{Deq} = \sqrt[12]{5,92 \cdot 11,86 \cdot 10,31 \cdot 8,29 \cdot 5,92 \cdot 5,95 \cdot 10,89 \cdot 10,31 \cdot 11,86 \cdot 5,95 \cdot 9,7 \cdot 10,89}$$

$$\text{Deq} = 8,66 \text{ m}$$



$$\text{En 1: } D_{aa'} = d_4; \text{ En 2: } D_{aa'_2} = 8,59; \text{ En 3: } D_{aa'_3} = d_4$$

$$DS = \sqrt[6]{r' \cdot D_{aa'_1} \cdot r' \cdot D_{aa'_2} \cdot r' \cdot D_{aa'_3}} \quad DS = \sqrt[6]{\left(12,5 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot 14,87 \cdot 8,59 \cdot 14,87}$$

$$DS = 0,35 \text{ m}$$

$$DS = \sqrt[6]{r' \cdot D_{aa'_1} \cdot r' \cdot D_{aa'_2} \cdot r' \cdot D_{aa'_3}} \quad DS = \sqrt[6]{(12,5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 14,87 \cdot 8,59 \cdot 14,87}$$

$$D'S = 0,39 \text{ m}$$

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{\text{Deq}}{DS} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{8,66}{0,35} = 6,42 \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{km}}$$

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L \cdot \text{long} = 2\pi \cdot 50 \cdot 6,42 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 20,17 \Omega$$

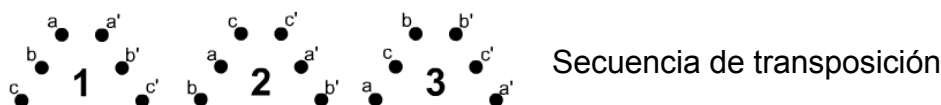
$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{\text{Deq}}{D'S}} = \frac{0,0242}{\log \frac{8,66}{0,39}} = 1,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{F}}{\text{km}}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot \text{long}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1,8 \cdot 10^{-8} \cdot 100} = 1768 \Omega$$

$$b) \text{ Deq} = \sqrt[12]{\underbrace{D_{ab}}_{d_1} \cdot \underbrace{D_{ac}}_{d_6} \cdot \underbrace{D_{ab'}}_{d_3} \cdot \underbrace{D_{ac'}}_{d_4} \cdot \underbrace{D_{ba}}_{d_1} \cdot \underbrace{D_{bc}}_{d_2} \cdot \underbrace{D_{ba'}}_{d_3} \cdot \underbrace{D_{bc'}}_{d_5} \cdot \underbrace{D_{ca}}_{d_6} \cdot \underbrace{D_{cb}}_{d_2} \cdot \underbrace{D_{ca'}}_{d_4} \cdot \underbrace{D_{cb'}}_{d_5}}$$

$$\text{Deq} = \sqrt[12]{5,92 \cdot 11,86 \cdot 10,31 \cdot 14,87 \cdot 5,92 \cdot 5,95 \cdot 10,31 \cdot 10,89 \cdot 11,86 \cdot 5,95 \cdot 14,87 \cdot 10,89}$$

$$\text{Deq} = 9,4 \text{ m}$$



$$\text{En 1: } D_{aa'} = 8,29 \text{ m}; \text{ En 2: } D_{aa'_2} = 8,59 \text{ m}; \text{ En 3: } D_{aa'_3} = 9,7 \text{ m}$$

$$DS = \sqrt[6]{r' \cdot Daa'_1 \cdot r' \cdot Daa'_2 \cdot r' \cdot Daa'_3} \quad DS = \sqrt[6]{\left(12,5 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot 8,29 \cdot 8,59 \cdot 9,7}$$

$$DS = 0,30 \text{ m}$$

$$D'S = \sqrt[6]{r' \cdot Daa'_1 \cdot r' \cdot Daa'_2 \cdot r' \cdot Daa'_3} \quad DS = \sqrt[6]{\left(12,5 \cdot 10^{-3}\right)^3 \cdot 8,29 \cdot 8,59 \cdot 9,7}$$

$$D'S = 0,33 \text{ m}$$

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{Deq}{DS} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{9,4}{0,30} = 6,89 \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{km}}$$

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L \cdot \text{long} = 2\pi \cdot 50 \cdot 6,89 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 21,65 \Omega$$

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{Deq}{D'S}} = \frac{0,0242}{\log \frac{9,4}{0,39}} = 1,75 \cdot 10^{-8} \frac{\text{F}}{\text{km}}$$

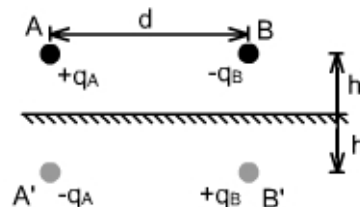
$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot \text{long}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \cdot 100} = 1819 \Omega$$

4) Los conductores de una línea monofásica se hallan a 6 m sobre el nivel del suelo.

Cada conductor tiene 1,5 cm de diámetro y se halla separado 3 m del otro.

Determinar la capacidad por km de línea:

- Considerando el efecto del suelo
- Sin considerar el efecto del suelo



a) Para considerar el efecto del suelo planteamos una imagen subterránea de la línea como muestra la figura y la calculamos como una línea de 4 conductores.

Siendo: $D = \sqrt{d^2 + 4h^2}$; $q_A = -q_B$ y los radios de los conductores iguales:

$$V_{AB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k} \left[q_A \left(\ln \frac{d}{r} - \ln \frac{D}{2h} \right) + q_B \left(\ln \frac{r}{d} - \ln \frac{2h}{D} \right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k} \left[q_A \cdot \ln \frac{\frac{d}{r}}{\frac{D}{2h}} - q_A \cdot \ln \frac{\frac{r}{d}}{\frac{D}{2h}} \right]; \quad V_{AB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k} \left[q_A \left(\ln \frac{\frac{d}{r}}{\frac{D}{2h}} - \ln \frac{\frac{r}{d}}{\frac{D}{2h}} \right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k} \left[q_A \left(\ln \frac{2h \cdot d}{r \cdot D} - \ln \frac{D \cdot r}{2h \cdot d} \right) \right]; \quad V_{AB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k} q_A \ln \frac{r \cdot D}{\frac{r \cdot D}{2h \cdot d}} = \frac{q_A}{2 \cdot \pi \cdot k} \ln \left(\frac{2h \cdot d}{r \cdot D} \right)^2$$

$$V_{AB} = \frac{q_A}{2 \cdot \pi \cdot k} \cdot 2 \cdot \ln \frac{2h \cdot d}{r \cdot D} \Rightarrow C_{AB} = \frac{q_A}{V_{AB}} = \frac{\pi \cdot k}{\ln \left(\frac{d}{r} \cdot \frac{2h}{D} \right)}$$

reemplazando D por su valor:

$$C_{AB} = \frac{\pi \cdot k}{\ln \left(\frac{d}{r} \cdot \frac{2h}{\sqrt{d^2 + 4h^2}} \right)}$$

$$C_{AB} = \frac{\pi \cdot k}{\ln \left(\frac{d}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4h^2}}} \right)} = \frac{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln \left(\frac{3}{\frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3^2}{4 \cdot 6^2}}} \right)} = 4,659 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

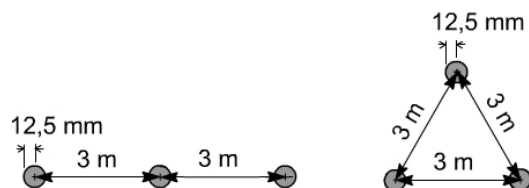
b) Si no consideramos el efecto del suelo aplicamos la ecuación para los dos conductores reales solamente: $D_{eq} = d$ y $D'S = r$

$$C_{AB} = \frac{\pi \cdot k}{\ln \frac{d}{r}} = \frac{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{3}{\frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{2}}} = 4,635 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

5) Las líneas de la figura tienen conductores macizos. Hallar:

a) La reactancia inductiva en $\frac{\Omega}{km}$

b) La reactancia capacitiva en $\Omega \cdot km$



En ambos casos: $DS = r \cdot e^{\frac{1}{4}} = 12,5 \cdot 10^{-3} \cdot e^{\frac{1}{4}} = 9,735 \cdot 10^{-3} m$

$$D'S = r = 12,5 \cdot 10^{-3} m$$

a) $D_{eq} = \sqrt[3]{D \cdot D \cdot 2D} = \sqrt[3]{2} \cdot D = 3,78 m$

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{3,78}{9,735 \cdot 10^{-3}} = 1,19 \cdot 10^{-3} \frac{H}{km};$$

$$x_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,19 \cdot 10^{-3} = 0,374 \frac{\Omega}{km}$$

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{3,78}{12,5 \cdot 10^{-3}}} = 9,756 \cdot 10^{-9} \frac{F}{km};$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 9,756 \cdot 10^{-9}} = 326271 \Omega \cdot km$$

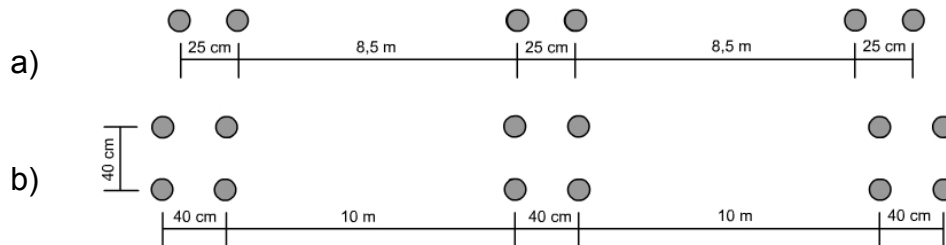
$$b) Deq = \sqrt[3]{D \cdot D \cdot D} = D = 3 m$$

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{3}{9,735 \cdot 10^{-3}} = 1,146 \cdot 10^{-3} \frac{H}{km};$$

$$x_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,146 \cdot 10^{-3} = 0,36 \frac{\Omega}{km}$$

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{3}{12,5 \cdot 10^{-3}}} = 0,01 \frac{\mu F}{km}; \quad x_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 0,01 \cdot 10^{-6}} = 318310 \Omega \cdot km$$

6) Calcular la inductancia y la capacidad de las siguientes líneas. En los dos casos, radio de subconductor: $r_c = 12,5$ mm.

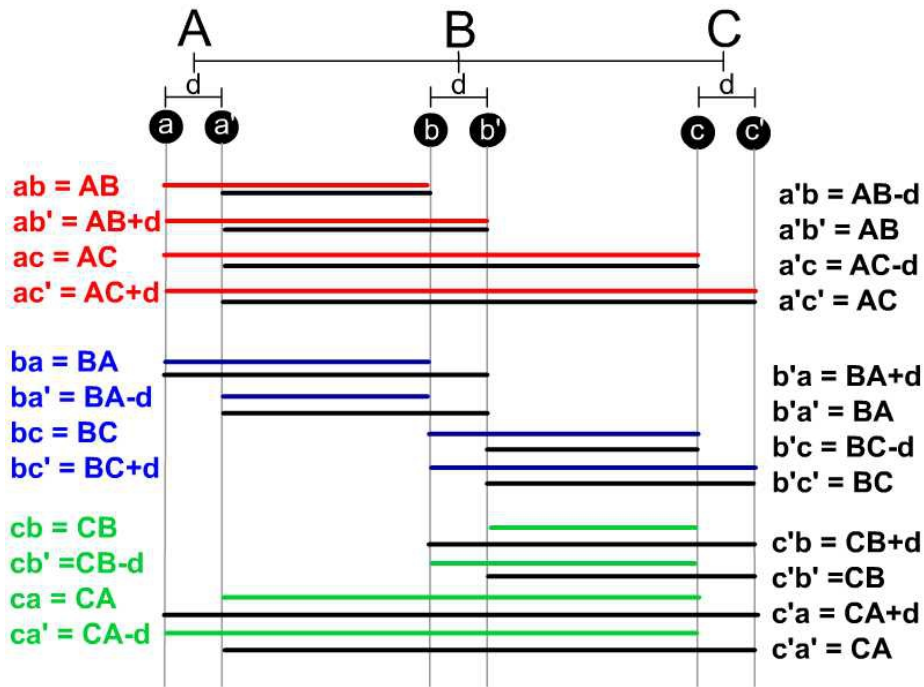


En ambos casos se considera, con bastante aproximación, la distancia entre fases desde el centro de una fase hasta el centro de la otra.

$$a) D'S = \sqrt{r' \cdot D_{AB}} = \sqrt{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot 0,25} = 0,049 m;$$

$$D'S = \sqrt{r' \cdot D_{AB}} = \sqrt{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25} = 0,056 m$$

Para el cálculo del Deq , deberíamos tener en cuenta todas las distancias posibles entre subconductores de las distintas fases, las que se detallan en la siguiente figura:



$$Deq = \sqrt[24]{\underbrace{ab \cdot ab' \cdot ac \cdot ac' \cdot a'b \cdot a'b' \cdot a'c \cdot a'c'}_A \cdot \underbrace{ba \cdot ba' \cdot bc \cdot bc' \cdot b'a \cdot b'a' \cdot b'c \cdot b'c'}_B \cdot \underbrace{ca \cdot ca' \cdot cb \cdot cb' \cdot c'a \cdot c'a' \cdot c'b \cdot c'b'}_B}$$

$$A = 8 \cdot 8,4 \cdot 16 \cdot 16,4 \cdot 7,6 \cdot 8 \cdot 15,6 \cdot 16 = 267597014,63$$

$$B = 8 \cdot 7,6 \cdot 8 \cdot 8,4 \cdot 8,4 \cdot 8 \cdot 7,6 \cdot 8 = 16693434,78$$

$$C = 8 \cdot 7,6 \cdot 16 \cdot 15,6 \cdot 8,4 \cdot 8 \cdot 16,4 \cdot 16 = 267597014,63$$

$$Deq = \sqrt[24]{267597014,63 \cdot 16693434,78 \cdot 267597014,63} = 10,075 \text{ m}$$

Si consideramos solo las distancias entre centros de fases:

$$Deq = \sqrt[3]{AB \cdot BC \cdot CA}$$

$$Deq = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 16} = 10,079$$

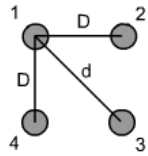
Como vemos, cuando la distancia entre fases es mucho mayor que la distancia entre sub-conductores de la misma fase, se puede calcular el Deq , con suficiente aproximación, tomando solo la distancia entre centros de fases.

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{Deq}{DS} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{10,075}{0,049} = 1,065 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}}$$

$$x_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,065 \cdot 10^{-3} = 0,335 \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{D_{eq}}{D'S}} = \frac{0,0242}{\log \frac{10,075}{0,056}} = 1,073 \cdot 10^{-8} \frac{F}{km};$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1,073 \cdot 10^{-8}} = 296654,13 \Omega \cdot km$$



$$d = \sqrt{(0,4)^2 + (0,4)^2} = \sqrt{2} \cdot 0,4$$

$$b) DS = \sqrt[4]{r'_1 \cdot D_{12} \cdot D_{13} \cdot D_{14}} = \sqrt[4]{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,4} = 0,172 m;$$

$$D'S = \sqrt[4]{r'_1 \cdot D_{12} \cdot D_{13} \cdot D_{14}} = \sqrt[4]{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,4} = 0,183 m$$

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{AC}}$$

$$D_{eq} = \sqrt[3]{\underbrace{\left(\frac{0,4}{2} + 10 + \frac{0,4}{2}\right)}_{10,4} \cdot \underbrace{\left(\frac{0,4}{2} + 10 + \frac{0,4}{2}\right)}_{10,4} \cdot \underbrace{\left(\frac{0,4}{2} + 10 + \frac{0,4}{2} + \frac{0,4}{2} + 10 + \frac{0,4}{2}\right)}_{20,8}}$$

$$D_{eq} = 13,10 m$$

$$L = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{D_{eq}}{D'S} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{13,1}{0,172} = 8,666 \cdot 10^{-4} \frac{Hy}{km}$$

$$x_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 8,666 \cdot 10^{-4} = 0,272 \frac{\Omega}{km}$$

$$C = \frac{0,0242}{\log \frac{D_{eq}}{D'S}} = \frac{0,0242}{\log \frac{13,1}{0,183}} = 1,3 \cdot 10^{-8} \frac{F}{km}$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1,3 \cdot 10^{-8}} = 244854 \Omega \cdot km$$